Le corps des nombre algébriques est algébriquement clos
(adaptation de Gourdon algebre p94 nouvelle edition, Perrin p67)

Soit $K \subset L$ une extension de corps et L algébriquement clos.
-> alors $a \in L$ est algébrique sur $K \Leftrightarrow k[a] = k(a) \Leftrightarrow [K(a) : K] < +\infty$
-> Les éléments de L algébriques sur K forment un corps $ALG(K) \subset L$
->$ALG(K)$ est algébriquement clos et donc $ALG(K) = L$

Def de l'algébricité : a est algébrique sur L , si $a \in L$ et il existe $P \in K[X]$, $P \neq 0, P(a) = 0$
Def de alg clos : tout polynôme a des racines dans le corps.

0) en effet l'ensemble des polynômes annulant a est un idéal, engendré par un polynôme minimal en degré et donc irréductible (par intégrité dans K) , noté π, $K[X]/(\pi)$ est donc un corps et le morphisme $K[X]/(\pi) \to K[a]$ est un isomorphisme (par le th d'isomorphisme) . Donc $K[a] = K(a)$, et puisque $K[X]/(\pi)$ est un K-ev de dimension $deg(\pi)$, c'est le cas de $K(a)$ et $[K(a) : K] = deg(\pi)$.
Réciproquement si $[K(a) : K] = m < +\infty$ alors la famille $1, a....a^m$ est liée dans $K[a]$et donc il existe $P \in K[X]$ tel que $P(a) = 0$.

1) Si x et y sont algébrique sur K
$[K(x) \ : K] < +\infty$
si y est algébrique sur K, il est aussi sur le sur-corps $K(x)$, autrement dit $K(x)[y] = K(x)(y)$ est un $K(x)$ espace vectoriel de dim fini
$[K(x, y) \ : K(x)] < +\infty$ d'où par multiplicativité des degrés
$[K(x, y) : K] = [K(x, y) \ : K(x)] \times [K(x) : K] < +\infty$
or $K(x - y) \subset K(x, y)$, de même $K(xy^{-1}) \subset K(x, y)$ si $y \neq 0$
donc toujours par multiplicativité des degrés $[K(x - y) : K] < +\infty \quad [K(xy^{-1}) : K] < +\infty$
et on a prouvé que $ALG(K)$est sous-corps de L

2) On considère un polynôme non nul de $ALG(K)[X]$ $P = \sum a_k X^k$ de racine z dans L (puisque L algébriquement clos)
On veut prouver que $z \in ALG(K)$. On obtiendra ainsi que $ALK(K)$ est clos et $ALG(K) = L$.
On peut déjà dire que P est dans $K(a_0, a_1....a_n)$ (*)

Par définition $[K(a_0) : K] < +\infty$
et de même qu'en 1) $[K(a_1, a_0) : K(a_0)] < +\infty$
$[K(a_1, a_0), K] < +\infty$ donc par multiplicativité des degrés
$[K(a_n, a_{n-1}, ...a_0) : K(a_{n-1}, ...a_0)] < +\infty$
et par une récurrence immédiate
$[K(a_n, a_{n-1}, ..a_0) : K] < +\infty$
$[K(a_n....a_0, z) : K] = [K(a_n...a_0, z) : K(a_n..., a_0)] \times [K(a_n....a_0) : K]$; le premier terme est fini puisque z est algébrique sur $K(a_0, ...a_n)$ (cf * et partie 1)
puisque $z \in K(a_n, ...a_0, z), [K(z) : K] < +\infty$ et $z \in ALG(K)$.